PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO I Hoja 1

1. Para un vector $\vec{a}$ arbitrario y constante, demostrar que $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición.

2. Sea ϕ una función espacial escalar con derivadas segundas continuas y $\vec{f}$ una función vectorial con componentes cuyas derivadas segundas sean también continuas. Probar entonces, $\nabla \mathrm{x}(\nabla\phi) = \vec{0}$ y $\nabla(\nabla \mathrm{x}\,\vec{f}) = 0$.

3. Mostrar que si $\vec{b} = \nabla \mathrm{x}\,\vec{a}$, entonces $\vec{a}$ no está unívocamente determinado por $\vec{b}$.

4. Hallar la divergencia y el rotacional del vector $\vec{r}$.

5. Sea $\vec{r}$ el vector de posición de un punto campo y $\vec{r}\,'$ el de un punto fuente, respecto de un sistema de referencia. Determinar el gradiente de $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^n$, y relacionarlo con el ∇'. Hallar la divergencia y el rotacional del vector $(\vec{r}-\vec{r}')/\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3$.

6. Considérese cualquier campo vectorial $\vec{f}$ tal que $\nabla\,\vec{f} = \rho$ y $\nabla \mathrm{x}\,\vec{f} = \vec{c}$. El escalar ρ y el vector $\vec{c}$ son funciones de x, y z (ρ puede interpretarse como una densidad de fuente y $\vec{c}$ como una densidad de circulación). Mostrar que si ambas densidades se anulan en el infinito, el campo vectorial $\vec{f}$ se puede expresar como la suma de dos partes, una irrotacional y la otra solenoidal (teorema de Helmholtz).

7. Demostrar que $\nabla \mathrm{x}\,\vec{A} = \vec{0}$ si

a) $\vec{A} = \vec{u}_\phi (k/\rho)$ en coordenadas cilíndricas, donde k es una constante.

b) $\vec{A} = \vec{u}_r\, f(r)$ en coordenadas esféricas, donde f(r) es una función arbitraria de la coordenada radial.

8. Dada una función vectorial

$$\vec{F} = \vec{i}\,(3y-az) + \vec{j}\,(bx-2z) - \vec{k}\,(cy+z)$$

a) Determinar las constantes a, b y c si $\vec{F}$ es irrotacional.

b) Determinar ϕ, tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$.

1. Calcula el flujo de un campo uniforme $\vec{E} = E\hat{k}$ a través de una semiesfera de radio R.

2. Demuestra que en un medio polarizado se tiene una densidad de carga $-\nabla \vec{P}$.

3. Demuestra que en un medio magnetizado se tiene una densidad de corriente cuya expresión es $\nabla x \vec{M}$.

4. Demuestra que la densidad de corriente debida al cambio de la polarización con el tiempo tiene la expresión $\partial \vec{P} / \partial t$.

5. Comprueba que siempre es posible encontrar potenciales electromagnéticos que satisfagan la condición de Lorentz.

PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO I Hoja 3

1. La distribución de carga en los núcleos ligeros se puede aproximar por

$$\rho = \rho_0(1 - r^2/a^2) \qquad r \le a$$
$$\rho = 0 \qquad r > a$$

Calcula la carga total, el campo eléctrico y el potencial.

2. Demuestra que el momento dipolar de una distribución de carga es independiente del origen si la carga total es nula.

3. Calcula los momentos multipolares de orden 0, 1 y 2 para un dipolo eléctrico.

4. Se tiene una carga -2q en el origen de coordenadas y dos cargas q en (0,0,1) y (0,0,-1). Calcula los momentos multipolares de orden 0, 1 y 2 y la expresión del potencial para puntos próximos y alejados. Representa curvas equipotenciales en el plano XZ.

5. Se tiene una densidad de carga uniforme ρ entre dos planos paralelos con una separación d, calcula el campo en todos los puntos del espacio.

6. Se tiene una distribución de carga homogénea ρ en el volumen de un cono de altura h y radio de la base R. Calcula el campo eléctrico en el vértice del cono.

Resultado: $E = \dfrac{\rho h}{2\varepsilon_0}\left[1 - h/\left(h^2 + R^2\right)^{1/2}\right]$

7. Se divide una distribución de carga esférica con un radio R y una densidad de carga ρ en dos partes iguales. Calcula la fuerza de interacción entre las dos semiesferas.

Resultado: $F = \dfrac{3Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2}$

8. Como el problema anterior pero con una distribución cilíndrica de carga. Calcula la fuerza por unidad de longitud entre las dos partes de la distribución.

Resultado: $F = \dfrac{\rho^2 R^3}{3\varepsilon_0}$

9. La estructura cristalina del NaCl es cúbica centrada en las caras. Comprueba que la energía de interacción entre los iones es de la forma $-\alpha N e^2/(8\pi\varepsilon_0 a)$, donde α es la 'constante de Madelung', N el número de moléculas por unidad de volumen, e la carga del electrón y a la distancia entre iones.

10. Calcula la energía de una distribución superficial esférica de carga Q y radio R.

Resultado: $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

11. Calcula la energía almacenada por dos distribuciones superficiales de carga esféricas y concéntricas de radios R y 2R y cargadas con +Q y -Q, respectivamente.

Resultado: $W = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$

12. Calcula la energía de interacción y la fuerza entre un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ y una distribución esférica de carga de densidad ρ y radio R.

Resultado: $W = \dfrac{Q\,\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

13. Obtén la expresión para la energía de interacción entre dos dipolos. Discute las condiciones para que la interacción sea atractiva o repulsiva.

1. Dos planos conductores infinitos, paralelos y conectados a tierra están separados por una distancia d. Se coloca una carga puntual q entre los dos planos. Utilícese el teorema de reciprocidad de Green para demostrar que la carga total inducida sobre uno de los planos es igual a -q multiplicada por la fracción de la distancia perpendicular total entre la carga q y el otro plano.

2. Obtener la matriz capacidad de un condensador esférico.

3. Dos conductores cilíndricos de radios a_1 y a_2 están dispuestos paralelamente y separados por una distancia d, grande frente a ambos radios. Demuéstrese que la capacidad por unidad de longitud viene dada aproximadamente por

$$C = 2\pi\varepsilon_0\left[\ln\left(\frac{d^2}{a_1a_2}\right)\right]^{-1}$$

Calcular el grosor del hilo que sería necesario para que una línea de transmisión bifilar tenga una capacidad de 10 pf/m si la separación entre los hilos fuera de 0.5 cm, 1.5 cm ó 5 cm.

4. Calcúlese la fuerza de interacción entre las placas de un condensador plano para:

a) Cargas fijas en cada conductor.
b) Diferencia de potencial fija entre los conductores.

5. Se tiene un condensador plano conectado a una fuente de diferencia de potencial V. Se introduce una lámina de material dieléctrico entre las placas. Calcula la fuerza y el trabajo realizado. ¿Qué ocurriría si el trabajo se realiza desconectando previamente la fuente?.

6. Entre las placas de un condensador plano se tiene un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0(1+x)$. Calcula la capacidad del condensador y, considerando que se aplica una diferencia de potencial V, calcula el campo E y las cargas de polarización.

PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO I Hoja 5

1. Se tiene una esfera conductora de radio R rodeada por una capa de material dieléctrico de radio interior Ri y de radio exterior Re, como se indica la Fig. 1. Se pide:

a) Calcular la capacidad del conductor.

b) Considerando que el conductor tiene una carga q, calcular la energía electrostática del sistema y la presión sobre el dieléctrico.

c) Considerando que el conductor está conectado a tierra y que sobre el radio exterior del dieléctrico se tiene una densidad de carga σ, calcular el campo eléctrico para cada punto.

2. Calcula la capacidad por unidad de longitud de un sistema de dos hilos conductores paralelos separados una distancia D y que están a una altura h sobre el plano de tierra (Fig. 2).

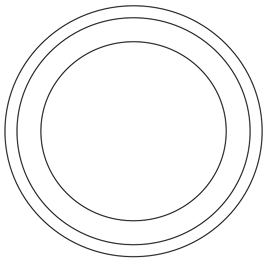


Fig. 1

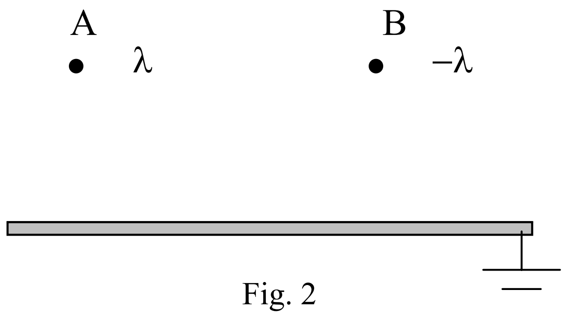


Fig. 2

3. Calcula la capacidad por unidad de longitud entre dos conductores cilíndricos, paralelos de radio a. Los ejes de los cilindros están separados una distancia D.

4. Se coloca una carga puntual Q dentro de una esfera conductora hueca de radio R a una distancia d de su centro, como se muestra en la Fig. 3. Encontrar la dirección de la fuerza experimentada por la carga y su magnitud en términos de Q, R y d.

5. Un anillo conductor de radio R, que tiene una carga Q, se coloca paralelo a un plano conductor infinito a una distancia l (Fig. 4). Calcular:

a) La densidad superficial de carga en el punto A del plano.

b) El potencial en el centro del anillo.

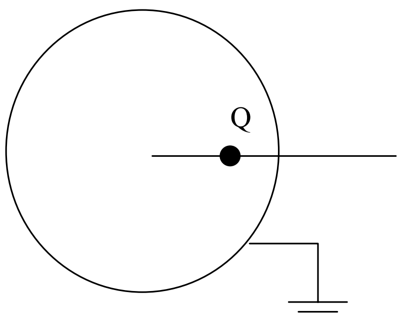


Fig. 3

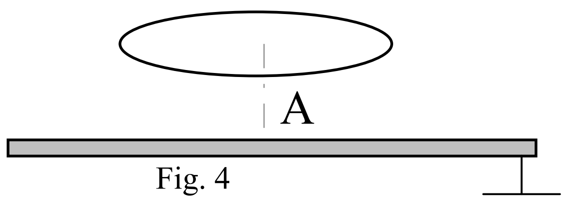
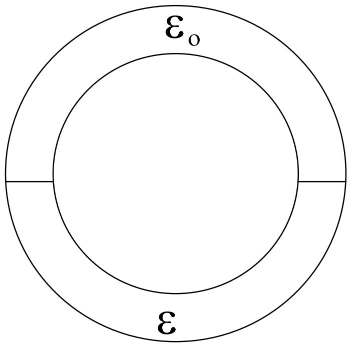


Fig. 4

PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO I Hoja 6

1. Sea el sistema de la figura formado por dos superficies esféricas concéntricas de radios R_1 y R_2 $(R_2 < R_1)$. En el espacio entre las esferas se introduce un dieléctrico de permitividad ε, de forma que llene la mitad de dicho espacio. Unimos las esferas a los bornes de una batería de f.e.m. V. Calcular a) Los valores de $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$ en el espacio entre las esferas. b) Las densidades de carga de polarización. c) La capacidad del sistema.



2. Partiendo de la ley de Ohm expresada como V=IR, verificar que se cumple la ecuación local para la ley de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

3. El espacio entre dos placas conductoras paralelas de superficie S está ocupado por un medio inhomogéneo cuya conductividad varía linealmente desde σ_1 en una de las placas (x=0) hasta σ_2 (x=d) en la otra placa. Si se aplica un voltaje V entre las placas, determinar

a) La resistencia entre las placas.
b) La densidad superficial de carga en las placas.
c) La densidad de carga de volumen y la carga total entre las placas.

4. Se tienen dos medios conductores con conductividades σ_1 y σ_2 en contacto. La densidad de corriente estacionaria en el medio 1 cerca de la frontera entre los medios es J_1 y forma un ángulo α_1 con la normal. Determinar la magnitud y dirección de la densidad de corriente en el medio 2, cerca de dicha frontera.

5. Dos esferas conductoras de radios R_1 y R_2 con una conductividad muy alta se sumergen en un medio mal conductor (por ejemplo, tierra) de conductividad σ y permitividad ε. La distancia entre ambas esferas es muy grande en comparación con los radios. Determinar la resistencia entre las esferas conductoras.

Solución: $R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{d}\right\}$

6. Se realiza una conexión a tierra enterrando un conductor semiesférico de 25 mm de radio con su base hacia arriba. Considerando que la tierra tiene una conductividad de $10^{-6}\Omega^{-1}m^{-1}$. Encontrar la resistencia entre el conductor y los puntos alejados en la tierra. Solución: R=6.36 MΩ

PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO I Hoja 7

1. Una línea de transmisión coaxial tiene un conductor interior de radio R_1 y un conductor exterior delgado de radio R_2. Determina la inductancia por unidad de longitud de la línea.

2. Calcula la inductancia por unidad de longitud de una línea de transmisión bifilar consistente en dos conductores rectos y paralelos de igual radio y separados una distancia d.

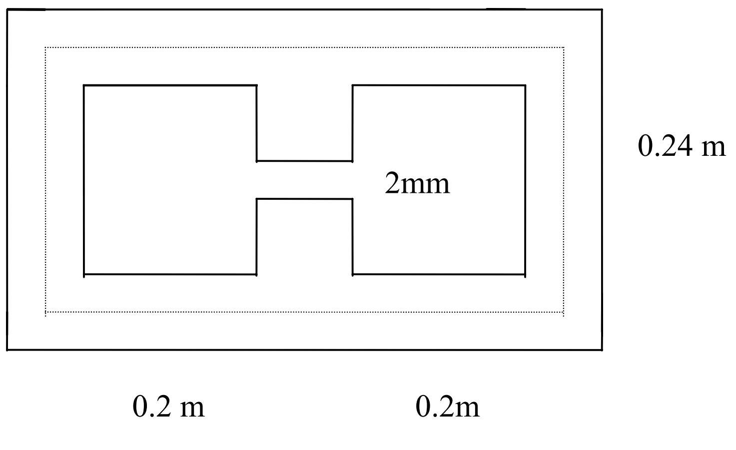
3. Considera un material conductor de sección rectangular recorrido por una corriente eléctrica. ¿Cuál será el resultado de aplicar un campo magnético perpendicular a la dirección de la densidad de corriente?

4. Se tiene una línea de transmisión formada por dos hilos conductores rectos y paralelos, de radios R y separados una distancia d. Se cortocircuita un extremo de la línea con un hilo conductor perpendicular a la línea. Calcula la fuerza sobre este conductor cuando circula corriente en la línea.

5. Una corriente de 3 A recorre un bobinado de 200 espiras situado en la rama central del circuito magnético de la figura. Considerando que el circuito tiene una sección transversal constante de 10^{-3} m^2 y una permeabilidad relativa de 5000:

a) Determina el flujo magnético en cada rama del circuito.

b) Determina el campo magnético en cada rama del circuito y en el 'gap' de aire.



6. Considérese un conductor delgado y recto en aire, situado paralelamente y a una distancia d de la superficie de un material magnético de permeabilidad relativa μ_r. Una intensidad I recorre el conductor. a) Demostrar que las condiciones de contorno se satisfacen si:

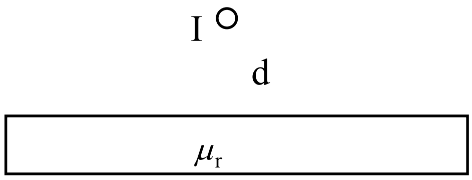
i) El campo magnético en el aire se calcula a partir de I y de una corriente imagen I_i, tal que

$$I_i = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I$$

estando estas corrientes equidistantes de la interfase y situadas en el aire.

ii) El campo magnético en el medio magnético se calcula a partir de I y de $-I_i$, situadas en la misma posición y en el medio material.

b) Para un conductor largo recorrido por una corriente I y con $\mu_r >> 1$, determinar el campo magnético B.

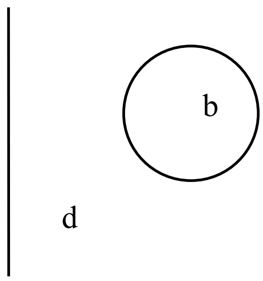


7. Un conductor infinitamente largo en el espacio es recorrido por una corriente I paralela, y a una distancia d, a la superficie frontera de un medio.

a) Discutir el comportamiento de las componentes normal y tangencial de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en la interfase si en el medio $\mu = 0$.

b) Determinar la densidad de corriente superficial en la interfase y compararla con la obtenida en el problema anterior.

8. Determinar la inductancia mutua entre un hilo infinitamente largo y recto y un anillo conductor de radio b, cuyo centro se haya a una distancia d del hilo.



9. Se tiene una brújula cuya aguja magnetizada se alinea con el campo magnético de la Tierra. Una pequeña barra magnética (un dipolo magnético) con momento magnético 2 A m^2 se sitúa a una distancia de 0.15 m del centro de la aguja de la brújula. Si se considera que el campo magnético terrestre es de 0.1 mT, calcular el ángulo máximo de desviación de la aguja de la orientación norte-sur causado por la barra magnética. ¿Cómo deberá orientarse la barra magnética?